Exakte und asymptotische Knotengradabzählung in planaren Karten

Lukas Daniel Klausner

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
Technische Universität Wien

22. Juni 2012

Vorstellung

- Lukas Daniel Klausner (`lukas.d.klausner@tuwien.ac.at`)
- 2006–2011: Bachelor- und Master-Studium an der Technischen Universität Wien
- seit Jänner 2012: Doktoratsstudium (betreut von Michael Drmota)
- derzeitige Forschung: Knotengrade in unterschiedlichen Zusammenhängen (Verteilung in planaren Karten, Verallgemeinerung kubischer Graphen, ...)

Thema

Fragestellung

- Wie kann man die Knotengrade in einem planaren Graphen mittels erzeugender Funktionen zählen?
- Wie sind die Knotengrade in einem zufälligen planaren Graphen verteilt?

Planare Karten

Definition

Eine **planare Karte** ist ein zusammenhängender planarer Graph (Schleifen und Mehrfachkanten erlaubt) zusammen mit einer Einbettung in die Ebene.

Definition

Eine **gewurzelte planare Karte** ist eine planare Karte mit einem ausgezeichneten Wurzelknoten v und einer mit v inzidenten ausgezeichneten Wurzelkante e. Die Fläche zur rechten von e (v wird als Ursprung der Richtung von e genommen) wird auch **Wurzelfläche** (oder Außenfläche) genannt.

Knotengrad

Definition

Der **Grad** eines Knotens v in einem Graph ist die Anzahl der mit v inzidenten Kanten (mit Vielfachheit, Schleifen zählen also doppelt).

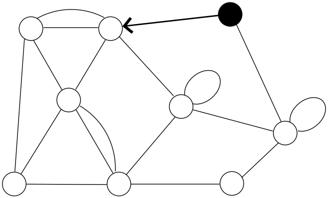


Abbildung: Gewurzelte planare Karte[1]

[1] Bildquelle: Michael Drmota

Dualer Graph

Definition

Zu jedem Graphen Γ gibt es den **dualen Graphen** Γ'. Die Knoten von Γ' entsprechen den Flächen in Γ, die Flächen von Γ' den Knoten von Γ; zwei Knoten in Γ' sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die entsprechenden Flächen in Γ eine gemeinsame Kante haben.

Beispiel

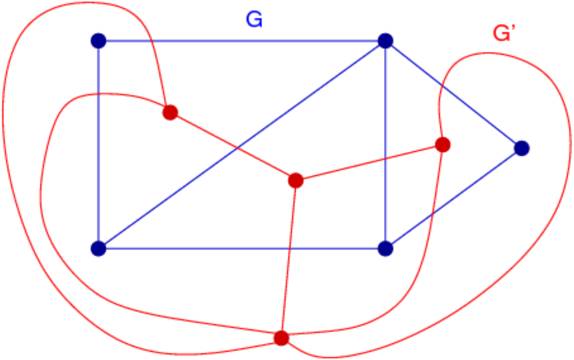


Abbildung: Graph und dualer Graph[2]

[2]Bildquelle: Wikimedia Commons

Äquivalenz Knotengrad–Flächenvalenz

Definition

Die **Valenz** einer Fläche f in einem Graph ist die Anzahl der mit f inzidenten Kanten.

Äquivalenz

- Der duale Graph einer planaren Karte ist eine planare Karte.
- Jede Aussage über die Knotengrade in planaren Karten ist damit äquivalent zu einer Aussage über die Flächenvalenzen in einer planare Karte.

Resultat von Drmota/Panagiotou

Mit Hilfe der sogenannten **quadratischen Methode** (quadratische Ergänzung der Funktionalgleichung, Auflösung an einer für die dominante Singularität kritischen Stelle) wurde ein zentraler Grenzwertsatz für die Knoten vom Knotengrad k in einer planaren Karte gezeigt.
Weiters wurde bei diesem Resultat eine Variable zur Zählung der Valenz der Wurzelfläche verwendet, die im Beweis die Rolle der sogenannten **katalytischen Variablen** übernimmt.

Problematik

Die Vorgangsweise mit quadratischer Methode und katalytischer Variable bringt einige Probleme mit sich:

- Durch den konkreten Beweisgang ist eine Anpassung der Methodik zum Zählen mehrerer Knotengrade gleichzeitig nicht einfach möglich.
- Das Resultat (der zentrale Grenzwertsatz) ist nicht explizit, was Mittelwerte und Varianzen betrifft.

Bijektivität zu gewissen Bäumen

Stattdessen wurde ein anderer Zugang gewählt: Zur Abzählung von planaren Karten gibt es einen Zugang (nach Bouttier, Di Francesco und Guitter) über gewisse Baumstrukturen, die sogenannten **Mobiles**.
Hierbei werden sogenannte Knoten-markierte Karten verwendet. Diese Modifikation lässt die Allgemeinheit des Resultats aber unbeschadet (die Abzählung ist durch einen einfachen Vorfaktor zu korrigieren).

Knoten-markierte planare Karten

Definition

Eine **Knoten-markierte planare Karte** (*vertex-pointed planar map*) ist eine planare Karte, bei der zusätzlich ein Knoten v_0 ausgezeichnet wird.

Definition

Die **geodätische Orientierung** einer Knoten-markierten planaren Karte ist wie folgt definiert: Allen Knoten außer dem ausgezeichneten Knoten v_0 wird ihre Entfernung von v_0 als Marke zugewiesen; Kanten, die zwischen zwei Knoten mit ungleichen Marken verlaufen, werden zum Knoten mit der größeren Marke hin orientiert.

Mobiles

Definition

Ein **Mobile** ist ein planarer Baum (kreisfreier und einfacher Graph) mit schwarzen und weißen Knoten, der zusätzlich zu den „normalen" Kanten noch „lose baumelnde" Halbkanten (sogenannte „Knospen" oder „Beine") an den schwarzen Kanten hat. Es gibt in einem Mobile keine Kanten zwischen zwei weißen Knoten, und jeder schwarze Knoten hat soviele Knospen wie weiße Nachbarknoten.

Bijektive Korrespondenz

Lemma

Es gibt eine bijektive Korrespondenz zwischen Knoten-markierten planaren Karten und Mobiles.

Algorithmus

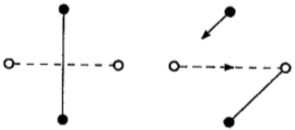
Sei Γ eine Knoten-markierte planare Karte mit ausgezeichnetem Knoten v_0. Mit den folgenden Schritten erhält man aus Γ das entsprechende Mobile M:

Bijektive Korrespondenz

Algorithmus (fortgesetzt)

- Man versehe Γ mit der geodätischen Orientierung.
- Man füge in jede Fläche von Γ einen schwarzen Knoten ein; die bereits bestehenden Knoten von Γ sind im Mobile die weißen Knoten.
- Für jedes Paar von benachbarten schwarzen Knoten verfahre man wie folgt (abhängig davon, ob die dazwischen liegende Kante zwischen zwei weißen Knoten orientiert ist oder nicht):

Bijektive Korrespondenz



Algorithmus (fortgesetzt)

- Als letzten Schritt lösche man alle Kanten zwischen zwei weißen Knoten (die Kanten der ursprünglichen Knoten-markierten planaren Karte) sowie den ausgezeichneten Knoten v_0.

Bijektive Korrespondenz

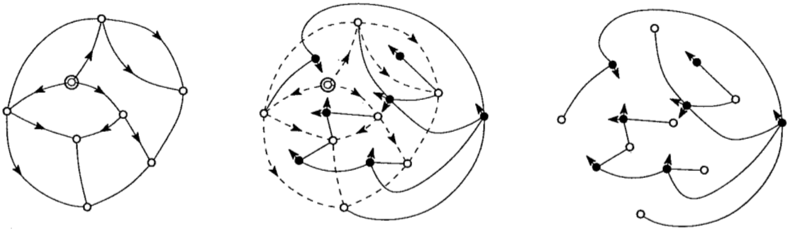


Abbildung: Beispiel für die Korrespondenz[3]

Dieser Algorithmus ist umkehrbar, die Umkehrung ist aber komplexer und wird hier aus Zeitgründen nicht erläutert.

[3] Bildquelle: Gwendal Collet/Éric Fusy

Erzeugende Funktion für Mobiles

Mobiles sind also gleich gut wie Knoten-markierte planare Karten. Wir wollen nun eine in einem Paper von Chapuy, Fusy, Kang und Shoilekova hergeleitete erzeugende Funktion für Mobiles als Ausgangspunkt für die analytische Knotengradabzählung verwenden.

Motzkin-Funktionen

Wir benötigen hierfür gewisse erzeugende Funktionen von Motzkin-Pfaden.

Definition

Ein **Motzkin-Pfad** ist ein diskreter Pfad von $(0,0)$ nach (n,m), wobei die möglichen Schritte $(+1,+1)$ (kurz $+1$), $(+1,0)$ (kurz 0) und $(+1,-1)$ (kurz -1) sind.
Eine **Brücke** ist ein Pfad, der in $(n,0)$ endet, eine **Exkursion** ist ein Brücke, deren y-Koordinate nichtnegativ bleibt.
Wir benötigen die erzeugenden Funktionen von Brücken ($B(t,u)$), Exkursionen ($E(t,u)$) und Pfaden, die in $(n,1)$ enden ($B^{(+1)}(t,u)$). Hierbei zählt t die 0-Schritte und u die $+1$-Schritte.

Motzkin-Funktionen

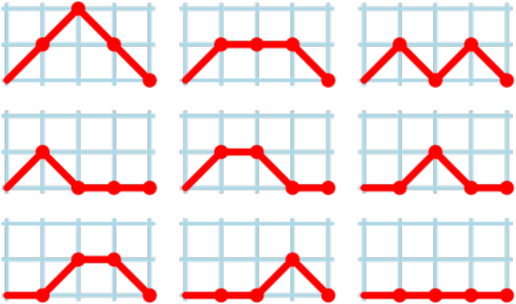


Abbildung: Beispiel für Motzkin-Pfade (Exkursionen)[4]

[4] Bildquelle: Wikimedia Commons

Erzeugende Funktionen spezieller Mobile-Klassen

Es gilt:

$$E = 1 + tE + uE^2$$
$$B = 1 + (t + 2uE)B$$
$$B^{(+1)} = EB$$

Mithilfe dieser Funktionen berechnen besagte Autoren die erzeugenden Funktionen spezieller Mobile-Klassen. (Alle Funktionen sind exponenziell in s, welches die Halbkanten ohne Knospen zählt, und gewöhnlich in x und y, welche die weißen bzw. schwarzen Knoten zählen.)

Erzeugende Funktionen spezieller Mobile-Klassen

- $L_{\triangledown}(x, y, s)$ zählt Mobiles mit einer zusätzlichen Wurzelkante (welche mitgezählt wird) an einem schwarzen Knoten.
- $L_{\circ}(x, y, s)$ zählt Mobiles mit einem ausgezeichneten weißen Wurzelknoten, der jedoch selbst nicht mitgezählt wird.
- $u(x, y, s)$ zählt Mobiles mit einer zusätzlichen Wurzelkante (welche mitgezählt wird) an einem weißen Knoten.

Erzeugende Funktionen spezieller Mobile-Klassen

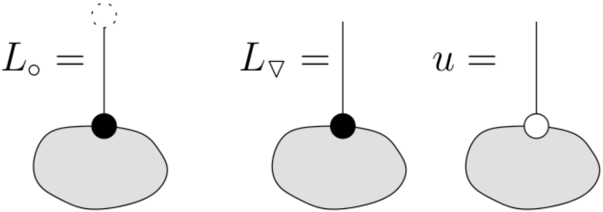


Abbildung: Spezielle Mobile-Klassen[5]

[5]Bildquelle: Chapuy/Fusy/Kang/Shoilekova

Erzeugende Funktionen spezieller Mobile-Klassen

Geht man nun um einen schwarzen Knoten im Kreis herum und betrachtet weiße Knoten, schwarze Knoten und Knospen jeweils als Schritte -1, 0 und $+1$, so erhalten wir genau eine solche Motzkin-Brücke.

Wir erhalten damit das Gleichungssystem:

$$L_{\triangledown}(x,y,s) = ys^2 B(L_{\triangledown}(x,y,s), u(x,y,s))$$

$$L_{\circ}(x,y,s) = ys^2 B^{(+1)}(L_{\triangledown}(x,y,s), u(x,y,s))$$

$$u(x,y,s) = \frac{s^2 x}{1 - L_{\circ}(x,y,s)}$$

Dissymmetrie-Theorem

Theorem

Sei $\mathcal{T}$ eine Klasse von Bäumen, $\mathcal{T}_\circ$ die Klasse solcher Bäume mit einem markierten Knoten, $\mathcal{T}_{\circ-\circ}$ die Klasse solcher Bäume mit einer markierten Kante und $\mathcal{T}_{\circ\to\circ}$ die Klasse solcher Bäume mit einer markierten und orientierten Kante. Dann gilt:

$$\mathcal{T} + \mathcal{T}_{\circ\to\circ} \simeq \mathcal{T}_\circ + \mathcal{T}_{\circ-\circ}$$

Dissymmetrie-Theorem

Angewandt auf Mobiles erhalten wir

$$T(x,y,s) = T_\bullet(x,y,s) + T_\circ(x,y,s) - T_{\bullet-\bullet}(x,y,s) - T_{\bullet-\circ}(x,y,s).$$

Wir können $T_\bullet(x,y,s)$, $T_\circ(x,y,s)$, $T_{\bullet-\bullet}(x,y,s)$, $T_{\bullet-\circ}(x,y,s)$ durch $L_\triangledown(x,y,s)$, $L_\circ(x,y,s)$, $u(x,y,s)$ ausdrücken und erhalten somit:

Dissymmetrie-Theorem

$$\begin{aligned}T(x,y,s) &= T_\bullet(x,y,s) + T_\circ(x,y,s) - T_{\bullet-\bullet}(x,y,s) - T_{\bullet-\circ}(x,y,s)\\ &= y \log E(L_\triangledown(x,y,s), u(x,y,s)) + x \log \frac{1}{1 - L_\circ(x,y,s)}\\ &- \frac{L_\triangledown(x,y,s)^2}{2s^2} - \frac{u(x,y,s)L_\circ(x,y,s)}{s^2}\end{aligned}$$

bzw. durch Setzen von $y = 1$ und $z = s^2$ das Endergebnis $M'(x,z) = T(x,1,z)$, wobei x die Knoten und z die Kanten in der planaren Karte zählt.

Anpassung der erzeugenden Funktionen

Zur analytischen Zählung der Knotengrade wechseln wir zunächst den Fokus: Wir wollen nun die schwarzen Knoten in den Mobiles zählen, da bezüglich dieser die Zerlegung leichter fällt.
(Wegen der Selbstdualität der Klasse der planaren Karten macht es keinen großen Unterschied, ob wir die weißen oder schwarzen Knoten betrachten.)

Anpassung der erzeugenden Funktionen

Weiters führen wir nun für $N \geq 0$ (oder $N = \infty$) die Variablen $w_0, w_1, \ldots, w_N$ ein, wobei w_k schwarze Knoten vom Grad k (Grad nur bezüglich benachbarter schwarzer Knoten) zählt.
Wir müssen in der Tat alle Grade von 0 bis N simultan zählen (da sich beim Zerlegen von $T_{\bullet - \bullet}$ der Knotengrad um 1 ändert).
Zwecks einfacherer Notation bezeichne $\mathbf{w}$ den Variablenvektor $\langle w_0, w_1 \ldots, w_N \rangle$.

Spezielle Mobile-Klassen (Reprise)

Wir erhalten somit ein neues Gleichungssystem für die Hilfsfunktionen:

$$\begin{aligned}
L_\triangledown(x,y,s,\mathbf{w}) &= ys^2\Big(B(L_\triangledown(x,y,s,\mathbf{w}),u(x,y,s,\mathbf{w})) \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{N}(w_k-1)\sum_m B_{k,m}L_\triangledown(x,y,s,\mathbf{w})^k u(x,y,s,\mathbf{w})^m\Big) \\
L_\circ(x,y,s,\mathbf{w}) &= ys^2\Big(B^{(+1)}(L_\triangledown(x,y,s,\mathbf{w}),u(x,y,s,\mathbf{w})) \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{N}(w_k-1)\sum_m B^{(+1)}_{k,m}L_\triangledown(x,y,s,\mathbf{w})^k u(x,y,s,\mathbf{w})^m\Big) \\
u(x,y,s,\mathbf{w}) &= \frac{s^2x}{1-L_\circ(x,y,s,\mathbf{w})}
\end{aligned}$$

Analytisches Resultat

Analog zu vorher können wir auch hier $T_\bullet(x,y,s,\mathbf{w})$, $T_\circ(x,y,s,\mathbf{w})$, $T_{\bullet-\bullet}(x,y,s,\mathbf{w})$, $T_{\bullet-\circ}(x,y,s,\mathbf{w})$ durch $L_\triangledown(x,y,s,\mathbf{w})$, $L_\circ(x,y,s,\mathbf{w})$, $u(x,y,s,\mathbf{w})$ ausdrücken. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}T_\bullet &= \log E(L_\triangledown(x,y,s,\mathbf{w}), u(x,y,s,\mathbf{w})) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N}(w_k-1)\sum_m [p^k,q^m](\log E(p,q))L_\triangledown(x,y,s,\mathbf{w})^k u(x,y,s,\mathbf{w})^m \\ T_\circ &= x\log\frac{1}{1-L_\circ(x,y,s,\mathbf{w})}\end{aligned}$$

Analytisches Resultat

$$
\begin{aligned}
T_{\bullet-\bullet} &= \frac{1}{2s^2}\Big(ys^2(B(L_\triangledown(x,y,s,\mathbf{w}),u(x,y,s,\mathbf{w}))\\
&\qquad + \sum_{k=0}^{N-1}(w_{k+1}-1)\sum_m B_{k,m}L_\triangledown(x,y,s,\mathbf{w})^k u(x,y,s,\mathbf{w})^m\Big)^2\\
T_{\bullet-\circ} &= \frac{u(x,y,s,\mathbf{w})L_\circ(x,y,s,\mathbf{w})}{s^2}
\end{aligned}
$$

Durch Zusammensetzen der obigen Terme (sowie ggf. Setzen von $x = 1$ und $z = s^2$) erhalten wir eine analytische Abzählung der Knotengrade in planaren Karten.

Zentraler Grenzwertsatz

In Michael Drmotas *Random Trees* wird gezeigt, dass für ein Gleichungssystem, wie wir es für $L_\triangledown(x, y, s, \mathbf{w})$, $L_\circ(x, y, s, \mathbf{w})$, $u(x, y, s, \mathbf{w})$ vorliegen haben, ein zentraler Grenzwertsatz für die Zufallsvariable $\mathbf{X}_n$ gilt, die die Anzahl von schwarzen Knoten der Grade 0 bis N zählt:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{X}_n - \mathbb{E}\mathbf{X}_n) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$$

Der Satz gilt jedoch explizit <u>nicht</u> für unendlichdimensionale Zufallsvariablen.

Zentraler Grenzwertsatz

Die nötigen Voraussetzungen (welche alle erfüllt sind) lauten:

- Das Funktionensystem ist analytisch.
- Die Taylor-Koeffizienten sind nichtnegativ.
- Gewisse Randbedingungen gelten für das System und seine Ableitungen.
- Der Abhängigkeitsgraph des Systems ist stark zusammenhängend.
- Der Konvergenzbereich des Systems ist so groß, dass es darin eine komplexe Umgebung von $\mathbf{u} = \mathbf{1}$ gibt, in der das System minimale reelle positive Lösungen in Abhängigkeit von $\mathbf{u}$ besitzt.

Mittelwerte

Der Satz bietet weiters auch eine Möglichkeit, $\mathbb{E}\mathbf{X}_n = \langle \mu(w_0), \ldots, \mu(w_N) \rangle$ explizit zu berechnen.
Der Rechenweg birgt aber keine besonderen Einblicke, daher an dieser Stelle zum Abschluss nur die ersten Werte:

Mittelwerte

i	$\mu(w_i)$	$\mu(w_i)$ (approx.)
0	$\frac{2403}{3310}\sqrt{5} - \frac{729}{662}$	0.522136359
1	$\frac{891}{8275}\sqrt{5}$	0.2407657483
2	$\frac{7749}{165500}\sqrt{5}$	0.1046966209
3	$\frac{1701}{82750}\sqrt{5}$	0.04596437014
4	$\frac{3807}{413750}\sqrt{5}$	0.02057452758
5	$\frac{346761}{82750000}\sqrt{5}$	0.009370165170
6	$\frac{3201741}{1655000000}\sqrt{5}$	0.004325867384
7	$\frac{3734343}{4137500000}\sqrt{5}$	0.002018186054
8	$\frac{14052501}{33100000000}\sqrt{5}$	0.0009493156339
9	$\frac{33266457}{165500000000}\sqrt{5}$	0.0004494625934
10	$\frac{1583391159}{16550000000000}\sqrt{5}$	0.0002139317381

Ausblick

Offene Fragen

- Gibt es Anwendungsmöglichkeiten der bijektiven Korrespondenz zwischen Knoten-markierten planaren Karten und Mobiles auf andere Klassen von Graphen?
- Lässt sich (mit anderer Methodik) ein zentraler Grenzwertsatz für die unendlichdimensionale Zufallsvariable finden, welche die Anzahlen von Knoten aller Knotengraden simultan misst?

Fragen und Feedback

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Bibliographie

J. Bouttier, P. Di Francesco, and E. Guitter, *Planar maps as labeled mobiles*, Electron. J. Combin. **11** (2004), no. 1, Research Paper 69, 27.

Guillaume Chapuy, Éric Fusy, Mihyun Kang, and Bilyana Shoilekova, *A complete grammar for decomposing a family of graphs into 3-connected components*, Electron. J. Combin. **15** (2008), no. 1, Research Paper 148, 39.

Gwendal Collet and Éric Fusy, *A simple formula for the series of bipartite and quasi-bipartite maps with boundaries*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. (submitted).

Michael Drmota, *Random trees*, SpringerWienNewYork, Vienna, 2009, An interplay between combinatorics and probability.